

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/279649432>

# Singular integral equation method in the analysis of a crack perpendicular to the interface. (The hypersingular integral equation method and the body force method)

**Article** in *Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu, C Hen/Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C* · December 1989

DOI: 10.1299/kikaia.55.2521

CITATIONS

9

READS

60

3 authors, including:



**Nao-Aki Noda**

Kyushu Institute of Technology

695 PUBLICATIONS 3,769 CITATIONS

SEE PROFILE

## 片側き裂を有する二層複合板の応力拡大係数\*

野田 尚 昭\*<sup>1</sup>, 荒 木 清 己\*<sup>2</sup>, Fazil ERDOGAN\*<sup>3</sup>Stress Intensity Factor in Two Bonded Elastic Layers  
with a Single Edge Crack

Nao-Aki NODA, Kiyomi ARAKI and Fazil ERDOGAN

In this paper, the plane problems of a single edge crack in two bonded elastic layers and in an elastic surface layer bonded to an elastic semi-infinite plane are analyzed by the body force method. The stress fields induced by a point force and a displacement discontinuity in two bonded elastic half-planes obtained by Hetenyi's solution, in other words, Green's functions in closed forms, are used as fundamental solutions to solve those problems. The boundary conditions for stress free-edges of the layers and the crack surface are satisfied by superposing the distributed fundamental solutions and adjusting their densities. The stress intensity factors are systematically calculated for the various geometrical conditions and the various stiffness ratios of the layers.

**Key Words:** Elasticity, Composite Material, Stress Intensity Factor, Body Force Method, Bonded Elastic Layers, Edge Crack

## 1. 緒 言

現在, 軽量で高強度を有する構造材料として複合材料が, さまざまな分野で幅広く実用化されている。一般の複合材料は, 多くの異材境界面を有することが多いが, このような複合材料中のき裂挙動の解明に際して, 基本的モデルとして一つの異材境界面を有する二層複合板中のき裂問題が多くの研究者により解析されている<sup>(1)~(6)</sup>。しかし, これらの研究の多くは無限板の解析であり, 有限板としての解析は少ない。

結城<sup>(7)</sup>らは, Hetenyi の解を体積力法に応用し, 二層有限板中の異材境界を横切る内部き裂の解析を行っている。Lu-Erdogan<sup>(8)</sup>は, 特異積分方程式法を用いて片側き裂および界面き裂の問題も含めた解析を行っているが, 特異積分方程式として問題を定式化するための積分核の計算が複雑であり, その導出に誤りがある。最近では, 境界要素法や有限要素法による解析もいくつか行われている<sup>(9)(10)</sup>が, 複合材の疲労実験に際し, 異材境界に近接するき裂を破壊力学的に評価する

ため, 高精度の解析が必要とされる。

そこで本研究では, 片側き裂を有する二層複合板(図1)の一樣引張りと面内曲げにおける応力拡大係数について, 異材境界を有する無限板中の一点に集中力および食違いが作用したときの応力場を Hetenyi の解より導き, 基本解とすることによって体積力法(BFM)を用いて解析した。特に数値計算において片側き裂の問題を精度良く解析するため, き裂が存在する

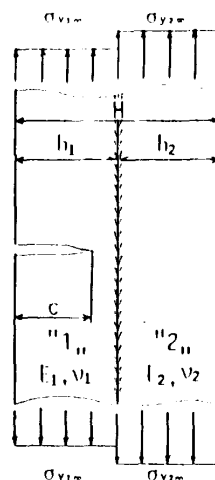


図1 片側き裂を有する二層複合板

\* 原稿受付 平成2年8月20日。

\*<sup>1</sup> 正員, 九州工業大学工学部 (〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。\*<sup>2</sup> 学生員, 九州工業大学大学院。\*<sup>3</sup> リーハイ大学 (Bethlehem, PA18015, USA)。

最小断面部に生じる曲げモーメントと合力を特別に考慮した<sup>(11)</sup>。そして、き裂長さや、両部材の縦弾性係数、板幅等を変化させ、系統的に応力拡大係数を求めた。また、半無限板に接合された表面層中のき裂問題、き裂が異材境界を貫通して異材境界に垂直に進展した場合についても解析を行った。

## 2. 異材境界を有する無限板中に存在する

### 単位食違いによる応力場

本解析では、Hetenyi の解<sup>(12)</sup>を基本解として異材境界を有する連続な無限板中に作用する単位食違いにより生じる応力場を求め、この基本解を無限板中に想定した仮想き裂面に分布させる。図2に示すように Y 方向の単位食違いのみが、部材1の着力点 $(\xi, \eta)$ に作用

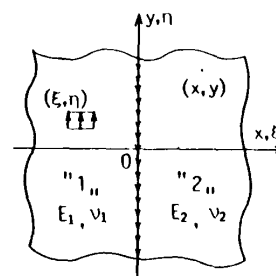


図2 異材境界を有する無限板中の単位食違い

した場合の注目点 $(x, y)$ に生じる応力を式(1)～(6)に示す。自由縁に作用させる基本解となる集中力による応力場は、文献(7)に与えられる。

#### (1) 注目点が部材1の場合

$$\begin{aligned} \sigma_{x1} = & \frac{G_1}{2\pi(x_1-1)} \left[ -\frac{2(x_1-1)^2}{(1+x_1)r_1^2} + 2\frac{(x_1^2-1)y_1^2 + x_1^2\{x_1(x_1-8)+23\}}{(1+x_1)r_1^4} \right. \\ & - 16x_1\frac{y_1^2(1+x_1) + (3-x_1)x_1^2}{(1+x_1)r_1^6} + 2\frac{A(x_1^2-2x_1+3)-2B}{(1+x_1)r_2^2} \\ & - 2\frac{(Ax_1-B)(1+x_1)y_1^2 + 2A(1+x_1)\{2\xi^2 + (x_1-1)x_2\xi - x_1x_2^2\}}{(1+x_1)r_2^4} \\ & + 12A\xi(2x+3\xi) - 2A(x_1+5)(x+3\xi)x_2] \\ & + 16A\frac{(1+x_1)\{2\xi^2 + (x_1-1)x_2\xi - x_1x_2^2\}y_1^2 - 2(1+x_1)x_2^2x\xi}{(1+x_1)r_2^6} \\ & + 192Ax_2^2x\xi\frac{(1+x_1)y_1^2 + (3-x_1)x_2^2}{(1+x_1)r_2^8} \Big] \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{y1} = & \frac{G_1}{2\pi(x_1-1)} \left[ \frac{2(3+x_1^2)}{(1+x_1)r_1^2} - 2\frac{(x_1^2-2x_1+5)x_1^2 + (x_1^2+6x_1-3)y_1^2}{(1+x_1)r_1^4} + 32x_1^2y_1\frac{(x_1-1)}{(1+x_1)r_1^6} \right. \\ & + 2\frac{Ax_1(3x_1-4)+2B+3A}{(1+x_1)r_2^2} + 2\frac{(1+x_1)[2A\{2\xi^2 - (5-x_1)x_2\xi - x_1x_2^2\} - (3Ax_1+B)y_1^2]}{(1+x_1)r_2^4} \\ & + 16A\frac{(1+x_1)[2x\xi x_2^2 - y_1^2\{2\xi^2 - (5-x_1)x_2\xi - x_1x_2^2\}]}{(1+x_1)r_2^6} \\ & + 192Ax_2y_1^2\frac{(1+x_1)x_2x + (3-x_1)(x_2\xi + y_1^2)}{(1+x_1)r_2^8} \Big] \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy1} = & \frac{G_1y_1}{2\pi(x_1-1)} \left[ -\frac{8(x_1+3)x_1}{(1+x_1)r_1^4} + 16x_1\frac{(x_1+1)x_1^2 + (3-x_1)y_1^2}{(1+x_1)r_1^6} \right. \\ & + 2\frac{(1+x_1)[2A(x_1-1)\xi - (3Ax_1+B)x_2] + (3-x_1)[x\{5A(x_1-2)+B\} + \xi\{A(7x_1+4)+B\}]}{(1+x_1)r_2^4} \\ & + 16A\frac{(1+x_1)[x_2\{\xi^2 + (x_1+7)x\xi + x_1x^2\}] - (3-x_1)[x_2\xi(6\xi + (x_1-5)x_2) + y_1^2\{x_1x_2-2x\}]}{(1+x_1)r_2^6} \\ & - 192Ax_2x\xi\frac{(1+x_1)x_2^2 + (3-x_1)y_1^2}{(1+x_1)r_2^8} \Big] \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

#### (2) 注目点が部材2の場合

$$\begin{aligned} \sigma_{x2} = & \frac{G_1}{2\pi(x_1-1)} \left[ 2\frac{A(x_1^2-2x_1+3)+2(x_1-B)-x_1^2-1}{(1+x_1)r_1^2} \right. \\ & + 2\frac{(1+x_1)[\{x_1(1-A)-(1-B)\}y_1^2 - 2x_1\{\xi(1-A)+x(B-1)\}]}{(1+x_1)r_1^4} \\ & + 2\frac{-(3-x_1)x_1[2(B-A)\xi + x_1\{(1-A)x_1 - (1-B)\} + 2\{(x-3\xi)(A-B) - 3(1-B)x_1\}]}{(1+x_1)r_1^4} \end{aligned}$$

$$+16x_1 \frac{(1+x_1)\{\xi(1-A)+x(B-1)\}y_1^2 + (3-x_1)\{\xi(1-A)+x(B-1)\}x_1^2}{(1+x_1)r_1^6} \dots\dots\dots (4)$$

$$\sigma_{y2} = \frac{G_1}{2\pi(x_1-1)} \left[ 2 \frac{x_1^2(1-A)+3(A-2B+1)}{(1+x_1)r_1^2} \right. \\ \left. + 2 \frac{(1+x_1)[2x_1\{\xi(1-A)+x(B-1)\} + y_1^2\{x_1(A-1)+3(B-1)\}]}{(1+x_1)r_1^4} \right. \\ \left. + 2 \frac{(3-x_1)[x_1\{2(A-B)\xi + x_1\{(1-A)x_1+B-1\}\} + 2y_1^2(1-A)]}{(1+x_1)r_1^4} \right. \\ \left. - 32x_1y_1^2 \frac{\{\xi(1-A)+x(B-1)\}(x_1-1)}{(1+x_1)r_1^6} \right] \dots\dots\dots (5)$$

$$\tau_{xy2} = \frac{G_1y_1}{2\pi(x_1-1)} \left[ 4 \frac{(B-A)\{\xi(3x_1-5)+x(3-x_1)\} - 2x_1\{(1-A)x_1+3(1-B)\}}{(1+x_1)r_1^4} \right. \\ \left. + 16x_1 \frac{(1-B)\{x_1^2(1+x_1)+y_1^2(3-x_1)\} + 2(1-x_1)(B-A)x_1\xi}{(1+x_1)r_1^6} \right] \dots\dots\dots (6)$$

ここで上式中の  $x_1, x_2, y_1, r_1, r_2$  は次式で定義される。

$$x_1 = (x - \xi), \quad x_2 = (x + \xi), \quad y_1 = (y - \eta) \\ r_1 = x_1^2 + y_1^2, \quad r_2 = x_2^2 + y_1^2 \dots\dots\dots (7)$$

また,  $x_i, A, B, \Gamma$  は次式のようにになる。

$$x_i = \begin{cases} 3 - 4\nu_i & (\text{平面ひずみ状態 } i=1, 2) \\ \frac{3 - \nu_i}{1 + \nu_i} & (\text{平面応力状態 } i=1, 2) \end{cases} \dots\dots\dots (8)$$

$$A = \frac{1 - \Gamma}{\Gamma x_1 + 1}, \quad B = \frac{x_2 - \Gamma x_1}{\Gamma + x_2}, \quad \Gamma = \frac{G_2}{G_1} \dots\dots\dots (9)$$

単位食違いが部材2に存在するときは, 式(1)~(6), および式(9)の  $x_1$  を  $x_2$ ,  $x_2$  を  $x_1$  として  $\Gamma$  を  $1/\Gamma$  にそれぞれ変換することによって式(1)~(3)が注目点が部材2, 式(4)~(6)が注目点が部材1のときの解となる。

### 3. 解析方法

**3・1 解析方法の概略** 図3に異材境界を有する無限板中に想定した体積力および食違いを分布させる仮想境界を示す。仮想自由縁と仮想き裂面を分割して, それぞれ体積力, 食違いを分布させ, 各区間の中点で境界条件を満足させる。打ち消すべき, き裂側自由縁のせん断力をあらかじめ小さくするために, き裂側自

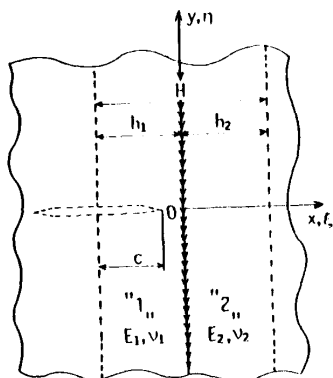


図3 異材境界を有する無限板に想定した体積力および食違いを分布させる境界

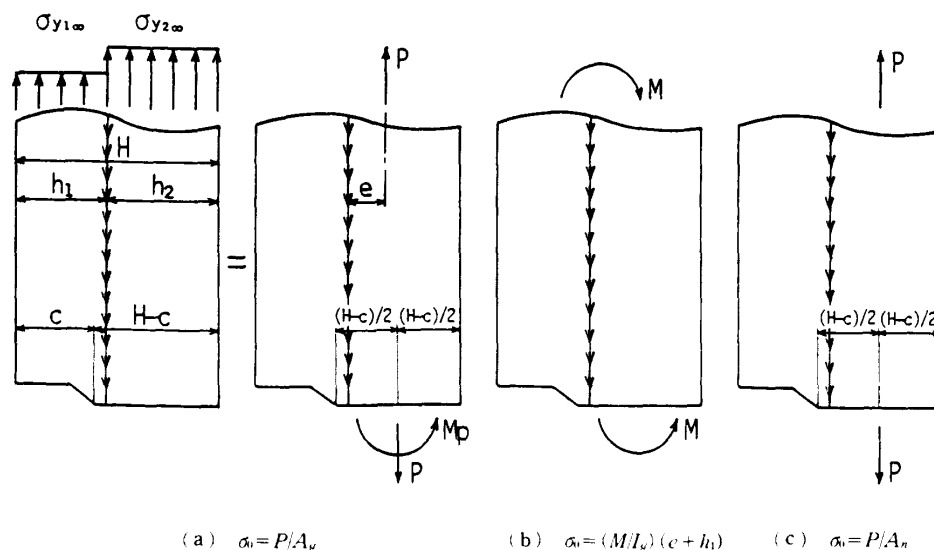


図4 最小断面部に作用する合力と曲げモーメント [ $A_0, I_0, A_n$  は, それぞれ式(24), (22), (20)に示す]

由縁に対して対称に食違いを分布させた。本論文では、最小断面部で合力のみ生じ、曲げモーメントが生じないような純引張り [図 4(c)] の場合と曲げモーメントのみが生じるような面内曲げ [図 4(b)] の場合を重ね合わせて一様引張り [図 4(a)] の状態を実現させた<sup>(11)</sup>。

**3.2 無次元化応力拡大係数の定義と遠方で与える境界条件** 本論文では、縦弾性係数の異なる二層複合板が遠方で一様引張りを受ける場合と面内曲げを受ける場合の応力拡大係数を中心に考察した。問題の無次元化応力拡大係数を次式で定義する。

$$F_1 = K_1 / \sigma_0 \sqrt{\pi c} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで  $K_1$  は応力拡大係数、 $\sigma_0$  は遠方で応力場の大きさを表す定数である。両部材の遠方で応力  $\sigma_{y1\infty}$ 、 $\sigma_{y2\infty}$  の間には、異材境界において遠方でひずみが、等しくなるという条件より次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{y2\infty}|_{x=0}}{\sigma_{y1\infty}|_{x=0}} &= \frac{E_2}{E_1} \text{ (平面応力状態)} \\ \frac{\sigma_{y2\infty}|_{x=0}}{\sigma_{y1\infty}|_{x=0}} &= \frac{E_2(1-\nu_1^2)}{E_1(1-\nu_2^2)} \text{ (平面ひずみ状態)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

本論文では、 $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$  の場合を中心として解析した。遠方で応力  $\sigma_{y1\infty}$ 、 $\sigma_{y2\infty}$  を次のように与える。

(1) き裂が部材 1 に存在する場合 ( $c < h_1$ )

(a) 一様引張り

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{y1\infty} &= \sigma_0, \quad \sigma_{y2\infty} = (E_2/E_1)\sigma_0 \\ \sigma_0 &= P / \{h_1 + (E_2/E_1)h_2\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで  $P$  は、遠方で与えられる引張力

(b) 面内曲げ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{y1\infty} &= -\frac{\sigma_0}{h_1 + e}(x - e) \\ \sigma_{y2\infty} &= -\frac{E_2}{E_1} \frac{\sigma_0}{h_1 + e}(x - e) \\ \sigma_0 &= M(h_1 + e) / I_\theta \quad [I_\theta \text{ は式 (22) で与えられる}] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$x = -h_1$  で  $\sigma_{y1\infty} = \sigma_0$  となる。ここで  $M$  は遠方で与えられる曲げモーメント、 $e$  は異材境界から部材 2 の方向を正としたときの中立軸までの距離であり、式 (14) で表される。

$$e = \{(E_2/E_1)h_2^2 - h_1^2\} / 2\{(E_2/E_1)h_2 + h_1\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

(c) 純引張り

$$\sigma_0 = P / (h_1 + h_2 - c) \quad \dots\dots\dots (15)$$

$P$  は、最小断面部中央に作用する外力

(2) き裂が異材境界を貫通して部材 2 に達する場合 ( $c > h_1$ )

(a) 一様引張り

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{y1\infty} &= (E_1/E_2)\sigma_0, \quad \sigma_{y2\infty} = \sigma_0 \\ \sigma_0 &= P / \{(E_1/E_2)h_1 + h_2\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

(b) 面内曲げ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{y1\infty} &= -\frac{E_1}{E_2} \frac{\sigma_0}{h_1 + e}(x - e) \\ \sigma_{y2\infty} &= -\frac{\sigma_0}{h_1 + e}(x - e) \\ \sigma_0 &= M(h_1 + e) / I_\theta \quad [I_\theta \text{ は式 (22) で与えられる}] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$x = -h_1$  で  $\sigma_{y1\infty} = (E_1/E_2)\sigma_0$  となる。

(c) 純引張り

$$\sigma_0 = P / (h_1 + h_2 - c) \quad \dots\dots\dots (18)$$

$P$  は、最小断面部中央に作用する外力

### 3.3 数値計算上の片側き裂を有する二層複合板の解法

実際の数値計算では、仮想境界で応力がいくらか残るので最小断面部での合力とモーメントは、遠方上のそれらと一致しない。このため本論文では、まず遠方で境界条件として一様引張りを与えたときの最小断面部に生じる合力  $P_1$  と曲げモーメント  $M_1$  そしてき裂先端密度  $\gamma$  を数値解析で求める。次に遠方で境界条件として面内曲げを与えたときの合力  $P_2$  とモーメント  $M_2$ 、き裂先端密度  $\gamma_B$  を同様に求める。これらを重ね合わせて純引張り状態と面内曲げ状態を実現させ、それらの結果から一様引張りの場合の結果を得る。三つの遠方で境界条件における無次元化応力拡大係数は、き裂が部材 1 に存在する場合 ( $c < h_1$ ) と部材 1 を貫通して部材 2 に達する場合 ( $c > h_1$ ) の両方において次式で求まる。

(a) 純引張状態の場合

$$F_{1c} = \frac{\gamma - \alpha_1 \gamma_B}{(P_1 - \alpha_1 P_2) / A_n} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで  $\alpha_1 = M_1 / M_2$ ,  $A_n = h_1 + h_2 - c$   $\dots\dots\dots (20)$

(b) 面内曲げ状態の場合

$$F_{1b} = \frac{\gamma_B - \alpha_2 \gamma}{(M_2 - \alpha_2 M_1) / Z_\theta} \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで  $\alpha_2 = P_2 / P_1$ ,  $Z_\theta = I_\theta / \beta_1$ ,  $\beta_1 = h_1 + e$ ,

$$I_\theta = \begin{cases} \left( \frac{h_1^3 + \frac{E_2}{E_1} h_2^3}{3} + e \left( h_1^2 - \frac{E_2}{E_1} h_2^2 \right) + e^2 \left( h_1 + \frac{E_2}{E_1} h_2 \right) \right) (c < h_1 \text{ の場合}) \\ \left( \frac{h_2^3 + \frac{E_1}{E_2} h_1^3}{3} + e \left( \frac{E_1}{E_2} h_1^2 - h_2^2 \right) + e^2 \left( h_2 + \frac{E_1}{E_2} h_1 \right) \right) (c > h_1 \text{ の場合}) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (22)$$

(c) 一様引張りの場合

$$F_{1a} = \alpha_3 F_{1c} + \frac{M_p}{Z_g} F_{1b} \quad (23)$$

ここで  $\alpha_3 = A_g/A_n$ ,

$$A_g = \begin{cases} h_1 + (E_2/E_1)h_2 & (c < h_1 \text{ の場合}) \\ h_2 + (E_1/E_2)h_1 & (c > h_1 \text{ の場合}) \end{cases}$$

$$M_p = \begin{cases} \sigma_0 \{ h_1(h_2 + c) + E_2/E_1(c - h_1)h_2 \} / 2 & (c < h_1 \text{ の場合}) \\ \sigma_0 \{ E_1/E_2(h_2 + c)h_1 + (c - h_1)h_2 \} / 2 & (c > h_1 \text{ の場合}) \end{cases} \quad (24)$$

#### 4. 計算結果および考察

**4.1 片側き裂を有する帯板(均一材)の解** 二層板の各部材の縦弾性係数を  $E_1 = E_2$  ( $\nu_1 = \nu_2$ ) と置くと、本解析の基本解に用いた Hetenyi の解は、無限板に対する解—Kelvin の解となり、均一材における解析結果が得られる。表 1 に、Kaya-Erdogan によって超越特異積分方程式法(HIEM<sup>(6)</sup>)で求められた均一材の一樣引張りと同面内曲げにおける無次元化応力拡大係数<sup>(13)</sup>と本論文の体積力法(BFM)によって求められた解を比較して示す。表 1 の BFM の数値は、3 種類の分割数に対して得られる 2 種類の外挿値が 4 けた程度一

致することを確認して決定した。全体の分割数は最大で 400 程度である。両者は、相対誤差 0.15% 以内で良く一致する。

**4.2 異材境界を有する半無限板の縁き裂の解** 表 2 および図 5 に一樣引張りにおける異材境界を含む半無限板の縁き裂の無次元化応力拡大係数を示す。表 2 の ( ) 内は、平面応力状態として計算した値であり、その他は、平面ひずみ状態の結果である。 $E_2/E_1 = 3.0$  のとき、平面応力と平面ひずみの結果の差は、き裂が深いほど大きくなるが、 $c/h_1 = 0.995$  のときでも 5% 程度である。Gecit によって特異積分方程式法を用いて求められた結果<sup>(14)</sup>からの読取り値は、表 2 の計算値と 2% 以内で良く一致した。

**4.3 片側き裂を有する二層複合板の解( $c < h_1$ )** 表 3 は、き裂先端が異材境界近傍に存在する問題について本論文の体積力法による解析結果(BFM)と結城ら<sup>(9)</sup>の境界要素法による解析結果(BEM)を示したものである。BEM による解と本解析結果は、き裂先端が異材境界に非常に近いとき相対誤差 6% 程度の違いがある。

表 4 および図 6、図 7 は、それぞれ  $h_2/h_1 = 3.0$ ,  $h_2/h_1 = 1.0$  の複合板で一樣引張りにおける  $F_I$  を平面ひずみ

表 1 HIEM と BFM の解析結果の比較(均一材)  
( $c$ : き裂長さ,  $H$ : 板幅  $= h_1 + h_2$ )

| $c/H$ | Uniform Tension |                     | In-Plane Bending |                     |
|-------|-----------------|---------------------|------------------|---------------------|
|       | HIEM            | BFM ( $E_1 = E_2$ ) | HIEM             | BFM ( $E_1 = E_2$ ) |
| 0.1   | 1.1892          | 1.189               | 1.0472           | 1.046               |
| 0.2   | 1.3673          | 1.367               | 1.0553           | 1.054               |
| 0.3   | 1.6599          | 1.659               | 1.1241           | 1.123               |
| 0.4   | 2.1114          | 2.111               | 1.2606           | 1.259               |
| 0.5   | 2.8246          | 2.823               | 1.4972           | 1.495               |
| 0.6   | 4.0332          | 4.032               | 1.9140           | 1.913               |
| 0.7   | 6.3549          | 6.355               | 2.7252           | 2.725               |
| 0.8   | 11.955          | 11.95               | 4.6764           | 4.675               |
| 0.9   | 34.633          | 34.62               | 12.462           | 12.46               |

表 2 異材境界を有する半無限板の縁き裂の  $F_I$

| $c/h_1$ | $E_2/E_1 = 1/3$ | $E_2/E_1 = 3.0$ | $E_2/E_1 = \infty$ |
|---------|-----------------|-----------------|--------------------|
| 0.1     | 1.133           | 1.113 (1.113)   | 1.106              |
| 0.2     | 1.160           | 1.095 (1.095)   | 1.074              |
| 0.3     | 1.195           | 1.073 (1.073)   | 1.034              |
| 0.4     | 1.234           | 1.049 (1.048)   | 0.992              |
| 0.5     | 1.276           | 1.024 (1.021)   | 0.946              |
| 0.6     | 1.320           | 0.996 (0.991)   | 0.896              |
| 0.7     | 1.371           | 0.964 (0.956)   | 0.839              |
| 0.8     | 1.437           | 0.922 (0.911)   | 0.767              |
| 0.9     | 1.552           | 0.857 (0.841)   | 0.658              |
| 0.925   | 1.604           | 0.832           | 0.617              |
| 0.95    | 1.682           | 0.797 (0.776)   | 0.563              |
| 0.975   | 1.831           | 0.741           | 0.482              |
| 0.995   | 2.280           | 0.623 (0.594)   | 0.337              |

[Plane Strain, ( ): Plane Stress]

表 3 BFM と BEM の解析結果の比較(二層複合板)

| $c/H$ | BFM   | BEM   |
|-------|-------|-------|
| 0.2   | 1.572 | 1.549 |
| 0.25  | 1.868 | 1.855 |
| 0.28  | 2.191 | 2.238 |
| 0.285 | 2.281 | 2.340 |
| 0.29  | 2.402 | 2.504 |
| 0.293 | 2.506 | 2.637 |
| 0.295 | 2.605 | 2.754 |
| 0.297 | 2.753 | 2.919 |

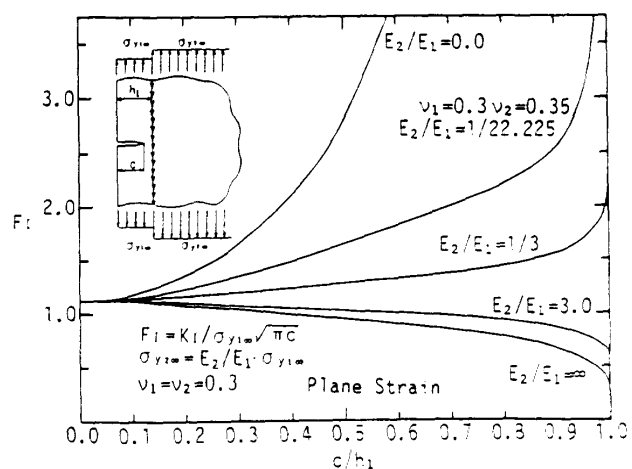
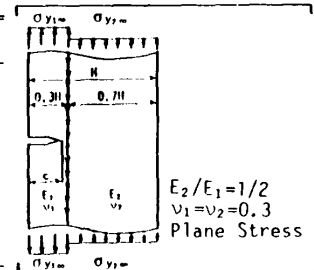


図 5 異材境界を有する半無限板の縁き裂の  $F_I$

問題として解析した結果である。 $E_2/E_1=\infty$ における解は、異材境界を有する半無限板において $E_2/E_1=\infty$ のときの解と一致する。表5および図8、図9は、それと同じ複合板を面内曲げの場合について解析した結果である。き裂先端が異材境界に近づく場合の $F_I$ は、 $E_1 > E_2$ なら $\infty$ 、 $E_1 < E_2$ なら零に近づく。 $c/h_1$ が、零に近づく場合は、剛性比に関係なく均一材における半無限板の縁き裂の値1.1215に近づく。

表4 一様引張りにおける二層複合板の $F_I(c < h_1)$ 

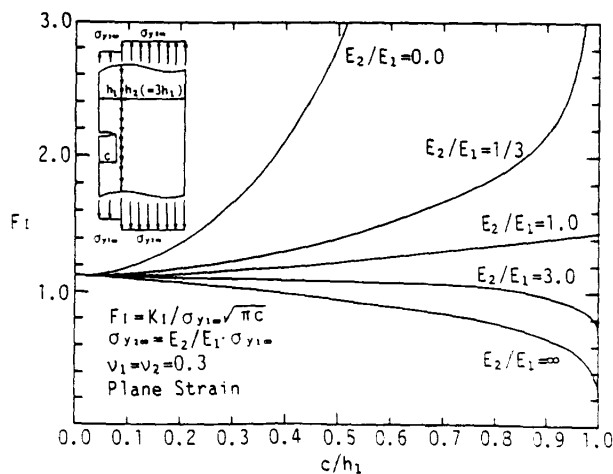
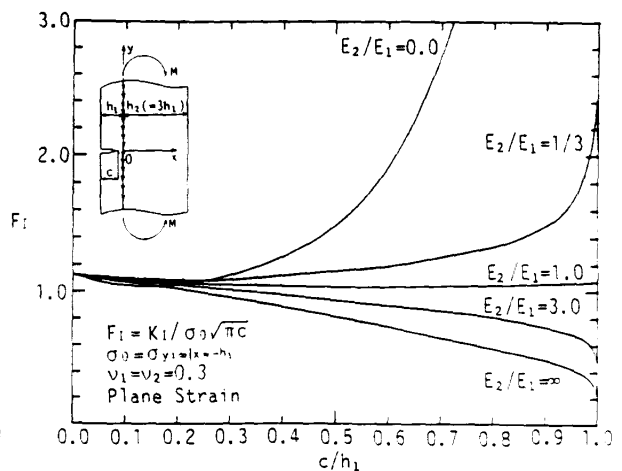
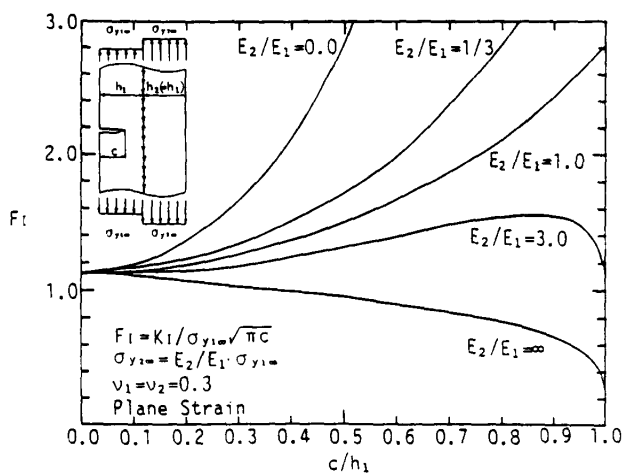
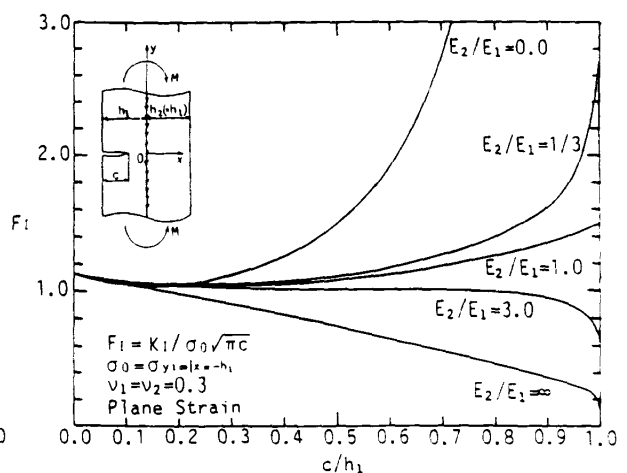
| $c/h_1$ | $E_2/E_1=3.0$ |               | $E_2/E_1=1/3$ |               | $E_2/E_1=\infty$ |               |
|---------|---------------|---------------|---------------|---------------|------------------|---------------|
|         | $h_2/h_1=1.0$ | $h_2/h_1=3.0$ | $h_2/h_1=1.0$ | $h_2/h_1=3.0$ | $h_2/h_1=1.0$    | $h_2/h_1=3.0$ |
| 0.2     | 1.154         | 1.107         | 1.232         | 1.181         | 1.074            | 1.074         |
| 0.4     | 1.250         | 1.090         | 1.511         | 1.319         | 0.992            | 0.992         |
| 0.6     | 1.390         | 1.071         | 1.984         | 1.527         | 0.896            | 0.896         |
| 0.8     | 1.528         | 1.031         | 2.817         | 1.859         | 0.767            | 0.767         |
| 0.9     | 1.538         | 0.976         | 3.589         | 2.163         | 0.658            | 0.658         |
| 0.995   | 1.198         | 0.792         | 6.566         | 3.581         | 0.337            | 0.337         |

**4.4 き裂が異材境界を貫通して部材2に達する場合の解( $c > h_1$ )** 表6は、き裂が異材境界を貫通して、部材2に達する問題について、結城ら<sup>(9)</sup>の境界要素法(BEM)による解析結果と比較したものである。両者は、最大で16%程度の違いが認められるが、本解析結果は、 $c/H \rightarrow 1$ につれて深いき裂の解に無理なく一致する。

表7、表8および図10、図11は、 $c=1.2h_1$ と固定し

表5 面内曲げにおける二層複合板の $F_I(c < h_1)$ 

| $c/h_1$ | $E_2/E_1=3.0$ |               | $E_2/E_1=1/3$ |               | $E_2/E_1=\infty$ |               |
|---------|---------------|---------------|---------------|---------------|------------------|---------------|
|         | $h_2/h_1=1.0$ | $h_2/h_1=3.0$ | $h_2/h_1=1.0$ | $h_2/h_1=3.0$ | $h_2/h_1=1.0$    | $h_2/h_1=3.0$ |
| 0.2     | 1.043         | 1.048         | 1.038         | 1.087         | 0.985            | 1.020         |
| 0.4     | 1.015         | 0.973         | 1.065         | 1.116         | 0.823            | 0.890         |
| 0.6     | 1.012         | 0.898         | 1.171         | 1.189         | 0.659            | 0.754         |
| 0.8     | 0.995         | 0.808         | 1.393         | 1.336         |                  |               |
| 0.9     | 0.946         | 0.738         | 1.619         | 1.494         | 0.378            | 0.490         |
| 0.995   | 0.701         | 0.535         | 2.680         | 2.369         | 0.177            | 0.241         |

図6 一様引張りにおける二層複合板の $F_I(h_2/h_1=3)$ 図8 面内曲げにおける二層複合板の $F_I(h_2/h_1=3)$ 図7 一様引張りにおける二層複合板の $F_I(h_2/h_1=1)$ 図9 面内曲げにおける二層複合板の $F_I(h_2/h_1=1)$

て  $h_2/h_1$  を変化させた場合の  $F_I$  を示している。き裂が異材境界を横切った場合、 $c/H$  がある程度大きければ、深いき裂の解によって応力拡大係数を精度よく評価できる。

深いき裂の解を式 (25), (26) に示す。

$$\left. \begin{aligned} F_{ID} &= \alpha_4 F_{ICD} + \beta_2 F_{IBD} \quad (\text{一様引張りの場合}) \\ F_{ID} &= \alpha_5 F_{IBD} \quad (\text{面内曲げの場合}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

ここで  $\alpha_4$ ,  $F_{IBD}$ ,  $F_{ICD}$ ,  $\alpha_5$ ,  $\beta_2$  は以下のとおりである。ただし、 $\lambda = c/H$ ,  $\beta = 1.1215$  である。

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \{(E_1/E_2)h_1 + h_2\}/H, \quad F_{IBD} = \beta/3\sqrt{\lambda(1-\lambda)}^3 \\ F_{ICD} &= \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{(\pi^2-4)(1-\lambda)}} \right. \\ &\quad \left. - \beta \left( \frac{2}{\beta\sqrt{\pi^2-4}} - 0.5 \right) \sqrt{\frac{1}{(1-\lambda)}} \right\} \\ \alpha_5 &= \frac{6I_g}{(h_1+e)H^2} \end{aligned}$$

表 6 BFM と BEM の解析結果の比較(二層複合板)

| c/H   | BFM   | BEM   | Deep Crack |
|-------|-------|-------|------------|
| 0.303 | 3.561 | 4.093 | 2.952      |
| 0.305 | 3.451 | 3.992 | 2.961      |
| 0.307 | 3.386 | 3.927 | 2.971      |
| 0.31  | 3.330 | 3.821 | 2.986      |
| 0.315 | 3.282 | 3.785 | 3.012      |
| 0.32  | 3.261 | 3.745 | 3.038      |
| 0.35  | 3.314 | 3.801 | 3.212      |
| 0.4   | 3.613 | 4.113 | 3.571      |
| 0.6   | 6.453 |       | 6.451      |
| 0.8   | 18.45 |       | 18.49      |
| 0.9   | 52.76 |       | 52.87      |

表 7 一様引張りにおける二層複合板の  $F_I(h_1+h_2=H)$

|           |           | BFM   |       | Deep Crack |       |
|-----------|-----------|-------|-------|------------|-------|
| $E_2/E_1$ | $h_2/h_1$ | 1/3   | 3.0   | 1/3        | 3.0   |
| 0.5       | 0.8       | 34.01 | 4.526 | 34.13      | 4.565 |
| 1.0       | 0.6       | 11.10 | 1.701 | 10.94      | 1.738 |
| 2.0       | 0.4       | 5.444 | 1.019 | 5.246      | 1.092 |
| 3.0       | 0.3       | 4.072 | 0.868 | 3.853      | 0.975 |
| 4.0       | 0.24      | 3.466 | 0.807 | 3.237      | 0.951 |

表 8 面内曲げにおける二層複合板の  $F_I(h_1+h_2=H)$

|           |           | BFM   |       | Deep Crack |       |
|-----------|-----------|-------|-------|------------|-------|
| $E_2/E_1$ | $h_2/h_1$ | 1/3   | 3.0   | 1/3        | 3.0   |
| 0.5       | 0.8       | 10.25 | 1.961 | 10.29      | 1.977 |
| 1.0       | 0.6       | 4.203 | 0.811 | 4.133      | 0.827 |
| 2.0       | 0.4       | 2.899 | 0.583 | 2.788      | 0.635 |
| 3.0       | 0.3       | 2.602 | 0.562 | 2.476      | 0.661 |
| 4.0       | 0.24      | 2.461 | 0.568 | 2.336      | 0.717 |

$$\beta_2 = 3\alpha_4 \{H - 2(h_1 + e) + c\}/H^2 \dots\dots\dots (26)$$

## 5. 結 言

本論文では、片側き裂を有する二層複合板の一様引張りと面内曲げにおける無次元化応力拡大係数について異材境界を有する無限板中の一点に集中力および食違いが作用する場合の応力場を Hetenyi の解より導き、基本解として体積法によって解析した。結果をまとめると以下になる。

(1) き裂長さ、板の剛性比、板幅等を系統的に変化させ二層複合板の応力拡大係数を精度よく求め、得られた結果を表 1~8 と図 5~11 にまとめた。

(2) 均一材として計算した場合の結果は、Kaya-Erdogan の HIEM による結果と誤差 0.15% 以内で一致した。また、異材境界を有する半無限板の縁き裂の解と Gecit の特異積分方程式法による結果は、誤差 2% 以内で一致した。

(3) 異材境界を貫通したき裂の応力拡大係数は、深いき裂の解を用いて比較的精度よく評価できる。

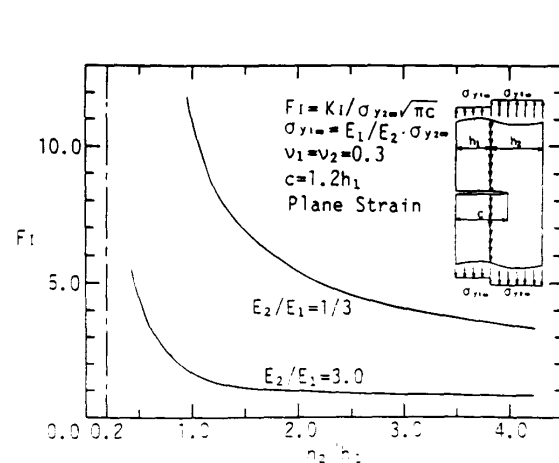


図 10 一様引張りにおける二層複合板の  $F_I(c > h_1)$

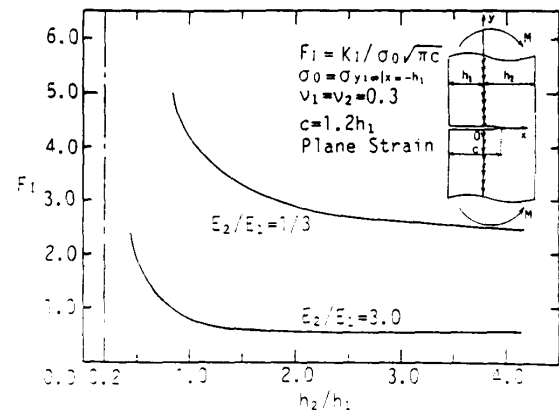


図 11 面内曲げにおける二層複合板の  $F_I(c > h_1)$



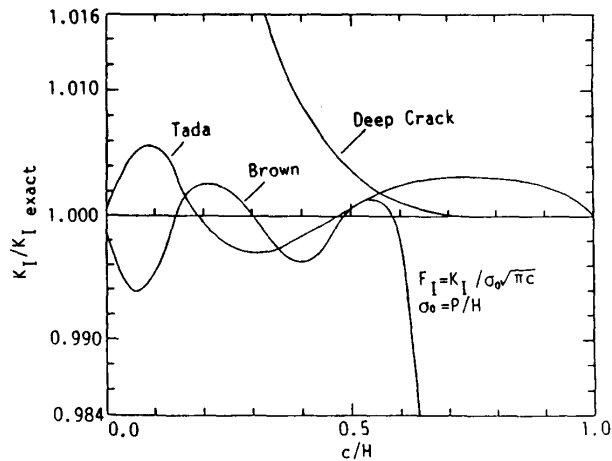


図 12 均一材の一様引張りにおける近似式の誤差評価

ご助言、ご指導いただいた九州大学・西谷弘信教授、九州工業大学・原田昭治教授に心からお礼申し上げます。

### 付 録

片側き裂を有する帯板均一材の応力拡大係数近似式の誤差評価 4・1 節に述べたように本解析結果と HIEM による結果は、相対誤差 0.15% 以内で一致しており、従来実験等に用いられていた近似式の誤差を評価することができる。比較検討をした近似式を式 (27)～(32) に示す。図 12 と図 13 は、それぞれ一様引張り、面内曲げにおける近似式の解と解析結果の比を示している。Brown の近似式は、適用範囲が  $c/H \leq 0.6$  であるのに対し Tada の近似式は、適用範囲がき裂長さ全範囲である。一様引張りの場合の最大誤差は、両近似式で  $c/H \leq 0.1$  の浅いき裂において約 0.6% である。また面内曲げの場合 Tada の近似式は、2% を越える誤差が認められる。一方 Brown の近似式は、面内曲げの場合にも十分精度がよい。

(a) 遠方で一様引張りを受ける場合 [ $\sigma_0 = P/H$ ,  $P$  は引張力]

$$F_I = 1.12 - 0.231\lambda + 10.55\lambda^2 - 21.72\lambda^3 + 30.39\lambda^4$$

$$0 \leq \lambda \leq 0.6 \text{ (Brown}^{(15)}) \dots\dots\dots (27)$$

$$F_I = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda} \tan \frac{\pi\lambda}{2}} \times \frac{0.752 + 2.02\lambda + 0.37\{1 - \sin(\pi\lambda/2)\}^3}{\cos(\pi\lambda/2)}$$

$$0 \leq \lambda \leq 1.0 \text{ (Tada}^{(16)}) \dots\dots\dots (28)$$

$$F_I = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{(\pi^2 - 4)(1 - \lambda)}} - \beta \left( \frac{2}{\beta\sqrt{\pi^2 - 4}} - 0.5 \right) \right. \\ \left. \times \sqrt{\frac{1}{(1 - \lambda)}} \right\} + 3\lambda \left( \frac{\beta}{3\sqrt{\lambda(1 - \lambda)^3}} \right)$$

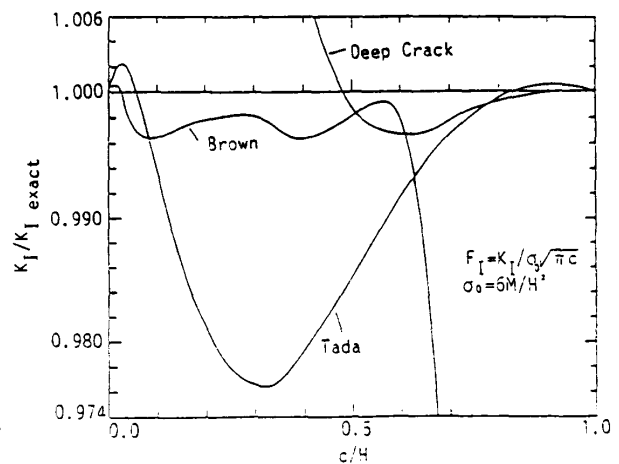


図 13 均一材の面内曲げにおける近似式の誤差評価

(深いき裂の解)..... (29)

(b) 遠方で面内曲げを受ける場合 [ $\sigma_0 = 6M/H^2$ ,  $M$  は曲げモーメント]

$$F_I = 1.122 - 1.40\lambda + 7.33\lambda^2 - 13.08\lambda^3 + 14.0\lambda^4$$

$$0 \leq \lambda \leq 0.6 \text{ (Brown}^{(15)}) \dots\dots\dots (30)$$

$$F_I = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda} \tan \frac{\pi\lambda}{2}} \times \frac{0.923 + 0.199\{1 - \sin(\pi\lambda/2)\}^4}{\cos(\pi\lambda/2)}$$

$$0 \leq \lambda \leq 1.0 \text{ (Tada}^{(16)}) \dots\dots\dots (31)$$

$$F_I = \beta/3\sqrt{\lambda(1 - \lambda)^3}$$

(深いき裂の解)..... (32)

ただし、 $\lambda = c/H$ ,  $\beta = 1.1215$  としている。

### 文 献

- (1) Erdogan, F., *Eng. Fract. Mech.*, 4-4 (1972), 811.
- (2) Cook, T. S. and Erdogan, F., *Int. J. Eng. Sci.*, 10-8 (1972), 677.
- (3) Erdogan, F. and Biriorkoglu, V., *Int. J. Eng. Sci.*, 11 (1973), 745.
- (4) Erdogan, F. and Bakioglu, M., *Int. J. Fract. Mech.*, 12-1 (1976), 71.
- (5) Ishida, M., *Eng. Fract. Mech.*, 2-1 (1970), 61.
- (6) 野田・梅木・Erdogan, 機論, 55-520, A (1989), 2521.
- (7) 北川・結城・神原, 45-397, A (1979), 1024.
- (8) Lu, M-C. and Erdogan, F., *Eng. Fract. Mech.*, 18-3 (1983), 491.
- (9) 結城・松本・木須, 機論, 53-492, A (1987), 1581.
- (10) 大路・小倉・原田・佐野, 材料, 29-325, (1980), 81.
- (11) 野田・西谷・深迫, 機論, 52-476, A (1986), 1066.
- (12) Dundurs, J. and Hetenyi, M., *J. Appl. Mech.*, 28 (1961), 103.
- (13) Kaya, A. C. and Erdogan, F., *Q. Appl. Math.*, 45-1 (1987), 105.
- (14) Gecit, M. R., *Int. J. Eng. Sci.*, 17 (1979), 287.
- (15) Brown, W. F. Jr. and Srawley, J. E., *ASTM STP*, 410 (1966), 12.
- (16) Tada, H., Paris, P. C. and Irwin, G. R., *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, (1973), 2.16, Del Research Corporation.